

Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé¹

Nous allons commencer par un cas plus simple, et en démontrant que *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé V de dimension finie est fermé*. Soit $\{f_1, \dots, f_k\}$ une base pour F — où donc $k = \dim(F)$ — et complétons-la en une base de l'espace V tout entier, c'est-à-dire choisissons $f_{k+1}, \dots, f_n \in V$ telle que $\{f_1, \dots, f_n\}$ soit une base de V — où donc $n = \dim(V)$. En particulier, pour tout élément $v \in V$, il existe $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ telles que $v = \sum_{i=1}^n v_i f_i$, et cette décomposition est unique. Nous allons ensuite munir l'espace V d'une norme. Nous rappelons à cette occasion que *toutes les normes sont équivalentes en dimension finie*, si bien que nous pouvons fixer n'importe quelle norme, *quoblibet*. Définissons à cet effet la norme $\|v\| := \max_{i=1, \dots, n} |v_i|$ pour tout élément $v = \sum_{i=1}^n v_i f_i \in V$.

Ceci étant posé, supposons que F ne soit pas fermé. Par définition, il existe donc une suite $(v^j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F admettant une limite \bar{v} , *i.e.* $\lim_{j \rightarrow \infty} v^j = \bar{v}$ — ce qui se lit encore par définition $\lim_{j \rightarrow \infty} \|v^j - \bar{v}\| = 0$ — et telle que $\bar{v} \notin F$. Décomposons \bar{v} dans la base construite précédemment de l'espace V , c'est-à-dire écrivons $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i f_i$. Comme nous avons supposé que \bar{v} n'appartenait pas au sous-espace F , il suit qu'il existe $\ell^* \in \{k+1, \dots, n\}$ telle que $\bar{v}_{\ell^*} \neq 0$. Or, comme $\lim_{j \rightarrow \infty} \|v^j - \bar{v}\| = 0$, il suit immédiatement de la définition de la norme $\|\cdot\|$ que pour tout $i = 1, \dots, n$, nous avons $\|v_i^j - \bar{v}_i\| \rightarrow 0$, où l'on note v_1^j, \dots, v_n^j la décomposition de v^j sur la base en question. Mais, cette fois-ci, et inversement, $v_\ell^j = 0$ pour tout $\ell \in \{k+1, \dots, n\}$ car le $v^j \in F$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par conséquent, nous obtenons une contradiction:

$$0 \neq |\bar{v}_{\ell^*}| = \underbrace{|v_{\ell^*}^j - \bar{v}_{\ell^*}|}_{=0} \rightarrow 0.$$

Nous avons donc démontré que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé de dimension finie est forcément fermé. Maintenant, nous supposons que $(V, \|\cdot\|)$ soit un espace vectoriel normé quelconque de dimension (potentiellement) infinie. Supposons que $F \subset V$ soit un sous-espace de dimension finie, et montrons que nécessairement, il est fermé. Encore une fois, donnons-nous f_1, \dots, f_k une base de F et supposons qu'il existe une suite $(v^j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F admettant une limite \bar{v} et telle que $\bar{v} \notin F$. Alors, l'espace vectoriel $W = \text{Span}(\{f_1, \dots, f_k, \bar{v}\})$ est un espace vectoriel normé de dimension *finie* et contenant *strictement* F , *i.e.* $F \subsetneq W$ — notez que ici l'espace vectoriel W est normé par la norme induite, c'est-à-dire que la norme d'un élément $w \in W$ est tout simplement la norme $\|w\|$ héritée de l'espace ambiant V . Mais, d'après ce qui précède, F est nécessairement fermé dans W , et donc il suit que $\bar{v} \in F$. Cela implique que $F = W$, une contradiction.

¹Il s'agit de l'*Exercice 1.15* du polycopié.

L'ensemble de Vitali n'est pas un borélien²

Soit $A \subset I := [0, 1]$ l'ensemble obtenu par *quotientage* de I par la relation $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Il faudrait commencer par y voir plus clair dans cette définition. Cela revient à dire, d'un point de vue ensembliste, que A un *ensemble d'ensembles*. C'est-à-dire, que si a est un élément de A , ce qui se note $a \in A$, alors a est un sous-ensemble de I , ce qui se note $a \subset I$. Si un tel sous-ensemble n'est pas vide, alors (par l'axiome du choix) on peut *choisir* un élément $x \in a$, et l'ensemble a est alors précisément donné par l'ensemble

$$a = \{y \in A : x - y \in \mathbb{Q}\} \subset I.$$

Ce que nous allons faire maintenant, c'est identifier ce sous-ensemble a avec un, n'importe lequel, *quodlibet*, de ses éléments. Pour simplifier, notons cet élément $\bar{a} \in a$. Bien évidemment, il faudrait vérifier que ce choix est consistant, c'est-à-dire que, si on prend a et b deux éléments *distincts* de A — donc, deux sous-ensembles $a, b \subset I$ telles que $a \neq b$ — et qu'on choisit comme représentants respectifs pour ces sous-ensembles $\bar{a} \in a$ et $\bar{b} \in b$, alors nécessairement $\bar{a} \neq \bar{b}$ — cela revient à dire, du point de vue des sous-ensembles, que, si $a \neq b$, alors $a \cap b = \emptyset$. Mais cela est vrai par le fait qu'une relation d'équivalence est *transitive*, *i.e.* si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x \sim z$ (*Je vous laisse vous en convaincre*).

Supposons que nous avons choisi des représentants \bar{a} pour chacun des éléments $a \in A$, et notons $\bar{A} \subset I$ l'ensemble formé de ces représentants. Notez que, pour tout $\bar{a} \neq \bar{b} \in \bar{A}$, on a que $\bar{a} - \bar{b}$ est un irrationnel. Nous allons montrer que \bar{A} n'est *pas* un borélien, en supposons le contraire et en obtenant une contradiction. Si \bar{A} est un borélien, alors l'ensemble

$$V := \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap I} (\bar{A} + r) \subset [0, 2]$$

est un borélien par union dénombrable de boréliens — en effet, si \bar{A} est un borélien, il est trivial que le translaté $\bar{A}_r := \bar{A} + r := \{\bar{a} + r : \bar{a} \in \bar{A}\}$ reste un borélien. De plus, pour tous $r \neq s \in \mathbb{Q}$, on a que $\bar{A}_r \cap \bar{A}_s = \emptyset$. En effet, s'il existe $x \in \bar{A}_r \cap \bar{A}_s$, alors il existe $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ telle que $x = \bar{a} + r = \bar{b} + s$. Cela implique $\bar{a} = \bar{b}$, car sinon $\bar{a} - \bar{b} = s - r \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas possible (*cf.* ci-dessus). Mais par conséquent $r = s$, une contradiction. Donc, on obtient que

$$\lambda(V) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap I} \lambda(\bar{A}_r)$$

Maintenant, il faut noter deux choses. La première, c'est que $V \subset [0, 2]$, d'où $\lambda(V) \leq 2 < \infty$. La deuxième, c'est que par définition de la mesure de

²Il s'agit de l'*Exercice 4.12* du polycopié

Lebesgue, $\lambda(\bar{A}) = \lambda(\bar{A}_r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap I$. Donc, nécessairement, $\lambda(\bar{A})$ doit être nul. En effet, si $\lambda(\bar{A}) > 0$, on obtiendrait la contradiction:

$$\infty > \lambda(V) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap I} \lambda(\bar{A}_r) = \underbrace{\lambda(\bar{A})}_{>0} \underbrace{\sum_{r \in \mathbb{Q} \cap I} 1}_{=\infty} = \infty.$$

Mais donc, on obtient que V est de mesure nulle, *i.e.* $\lambda(V) = 0$. Cependant, par définition de l'ensemble \bar{A} , pour tout réel $a \in I$ il existe forcément un élément $\bar{a} \in \bar{A}$ telle que $a - \bar{a} \in \mathbb{Q} \cap I$. Par conséquent, $I \subset V$. On arrive donc à la conclusion que l'ensemble I serait négligeable pour la mesure, une contradiction évidente. Par conséquent, V ne peut pas être mesurable (pour la tribu des boréliens). \square

Continuité d'une intégrale à paramètre³

Nous considérons la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} dt$$

Montrons tout d'abord que cette fonction est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ici, notons tout d'abord que l'intégrande est une fonction continue (d'où mesurable) et positive. Donc, si « *bien définie* » s'entend ici comme « *l'intégrale fait sens* », alors cette fonction est effectivement bien définie, partant qu'on lui autorise à prendre la valeur $+\infty$ — c'est-à-dire comme fonction à valeurs dans la droite étendue $\bar{\mathbb{R}}$. Si « *bien définie* » veut de surcroît dire que « *l'intégrale est finie* », alors c'est aussi le cas. En effet, l'intégrande se comporte comme t^{-2} au voisinage de l'infini et, d'après le fait bien connu que $\cos(u) \sim 1 - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ pour $u \rightarrow 0$, on trouve que l'intégrande se comporte comme $\frac{1}{2}x^2$ proche de l'origine, une quantité fixée indépendante de la variable d'intégration t . Par conséquent, $F(x) < \infty$ est une quantité positive et finie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrons à présent que la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est en fait continue. Notons $f(x, t) := \frac{1 - \cos(tx)}{t^2}$, de telle façon à ce que $F(x) = \int_0^{\infty} f(x, t) dt$. Nous avons (i) pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue (par prolongement en $t = 0$) et donc mesurable, (ii) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (et a fortiori pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc), la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue. Finalement, il s'agit de trouver une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ indépendante de $x \in \mathbb{R}$ telle que g soit intégrable sur $[0, \infty)$ et telle que $|f(x, t)| \leq g(t)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. En utilisant que $|\cos(u)| \leq 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a que $|f(x, t)| \leq 2t^{-2}$ pour

³Il s'agit de l'*Exercice 4.33* du polycopié

$(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Cependant, au voisinage de l'origine, la fonction $t \mapsto t^{-2}$ n'est pas intégrable, et n'est donc pas un bon candidat pour g . Pour contourner ce problème, nous pouvons utiliser l'inégalité bien connue⁴ $1 - \cos(u) \leq u^2$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. En particulier, si on pose

$$g(t) := \begin{cases} x^2/2 & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{2}{t^2} & t \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Cependant, cette fonction dépend de x ! Mais n'oublions pas : la continuité est une notion locale — *i.e.* dire que F est continue sur \mathbb{R} , c'est dire qu'elle est continue en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Par conséquent, au lieu de demander que l'inégalité $|f(x, t)| \leq g(t)$ soit vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit, pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}$, de trouver une fonction g_{x_0} (qui dépend de x_0) telle que $|f(x, t)| \leq g_{x_0}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et **pour tout x dans un voisinage de x_0** , disons, par exemple, dans $V_{x_0} := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pour un certain $\delta > 0$. Ceci étant posé, définissons

$$g_{x_0}(t) := \begin{cases} \max\left(\frac{(x_0 - \delta)^2}{2}, \frac{(x_0 + \delta)^2}{2}\right) & 0 \leq t \leq 1 \\ 2t^{-2} & t \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Alors, les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres sont bien réunies, et la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bien continue \square .

[Remarque] Travailler avec des équivalents dans la deuxième partie de la preuve (*i.e.* sur la continuité) est *dangereux*, car, ici, la variable x bouge dans un voisinage de x_0 . Par exemple, si on considère

$$F(x) := \int_0^{1/x} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

Cette fonction est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+^* , mais elle n'est *pas* continue à l'origine. Si on travaille avec des équivalents sans prendre garde, on pourrait potentiellement écrire de grosses bêtises. En effet, écrivons $f(x, t) := \chi_{[0, x^{-1}]} t^{-\frac{1}{2}}$, de telle façon à ce que $F(x) = \int_0^\infty f(x, t) dt$. Ici, on a l'équivalent $f(x, t) \sim 0$ au voisinage de l'infini, et en fait c'est précisément égal à 0 pour tout $t \geq x^{-1}$. Mais, l'important, ici, c'est que le voisinage sur lequel cette équivalent est véridique, à savoir $[x^{-1}, \infty)$, dépend de x . Si on ne fait pas attention, on dit : *Eh bien, $|f(x, t)| = 0$ pour t assez grand et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et donc voilà !* À bon entendeur.

⁴Qui se démontre en utilisant deux fois le théorème de Lagrange

Quelques remarques en vrac

[Une mesure qui « *finitely additive* » mais non pas σ -additive] Dans la définition d'une mesure, on demande à ce que soit vérifiée la propriété de σ -additivité: *Pour toute collection (au plus) dénombrable d'ensembles $(A_n)_n$ mesurables et deux à deux disjoints (au sens ensembliste), on a que la mesure de l'union $\bigcup_n A_n$ est donnée par la somme des mesures des A_n .* On pourrait se demander s'il suffit en fait de requérir que μ soit « *finitely additive* », c'est-à-dire que pour n'importe quels deux ensembles mesurables A et B disjoints, on ait $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, pour obtenir la σ -additivité. Ceci est faux, et voici un contre-exemple. Prenons que $X = \mathbb{N}$, et munissons cet ensemble de sa plus grosse tribu, à savoir $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ensuite, prenons $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ telle $\mu(E) = 0$ si E est de cardinalité finie et $\mu(E) = 1$ si E est de cardinalité *co-finie*, c'est-à-dire si son complémentaire contient un nombre fini d'éléments.

[\mathbb{Q} n'est ni fermé ni ouvert] Il a été écrit quelque part que, comme \mathbb{Q} est une réunion dénombrable de singletons, *i.e.* $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$, et que les singletons sont toujours des fermés⁵, alors \mathbb{Q} est fermé. C'est bien évident faux. Ce qui est vrai, c'est qu'une réunion finie de fermés reste fermée, mais une réunion (au moins) dénombrable n'a aucune raison d'être fermée. Prenez par exemple $I_n = [n^{-1}, 1]$, donc la réunion est donnée par $(0, 1]$, qui n'est clairement pas fermé. Il a aussi été écrit quelque part que \mathbb{Q} est ouvert. C'est bien évidemment faux, car je peux toujours trouver un irrationnel aussi proche que je veux de n'importe quel nombre rationnel. En fait, il faut se rappeler que \mathbb{Q} est *dense* dans \mathbb{R} — l'adhérence de \mathbb{Q} est \mathbb{R} .

[Une mesure σ -additive est aussi *sous-additive*] Dans la démonstration que la mesure de Lebesgue de \mathbb{Q} est nulle, on peut écrire (comme certains d'entre vous l'ont fait) que

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Et écrire, donc, que

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \lambda \left(\sum_{p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}^*} \left\{ \frac{p}{q} \right\} \right)$$

Le problème (qui est seulement d'apparence, et c'est ici mon propos), c'est qu'a priori, la représentation que nous avons donnée de \mathbb{Q} n'est pas bijective, et donc que les singletons qui apparaissent ci-dessus ne sont pas deux à

⁵Attention, ce n'est pas vrai dans tout espace, *cf.* les espaces qui ne sont pas séparés, voir Wikipédia

deux disjoints. Cependant, ce n'est pas grave, car, pour toute mesure μ , et pour toute collection (au plus dénombrable) $(A_n)_n$ de mesurables *a priori* non-disjoints, il est vrai que

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

Essayez de démontrer cette propriété, en utilisant la Proposition 4.2 & 4.3 du polycopié. !

$|\det(\mathbf{A})|$ est le volume de l'image par \mathbf{A} du parallépipède unitaire

Prenons une matrice carrée $A = \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Quitte à multiplier à gauche par une matrice de rotation R et considérer ainsi la matrice $A' = RA$, on peut supposer que

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

Le parallélogramme dont par les vecteurs $(1, 0)$ et (a_1, a_2) est d'aire $|a_2|$. D'où

$$|\det(A)| = |\det(R^{-1}A')| = \underbrace{|\det(R^{-1})|}_{=1} \cdot |\det(A')| = |a_2|.$$