Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé[1]

Nous allons commençer par un cas plus simple, et en démontrant que *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé V de dimension finie est fermé.* Soit $\{f_1, \dots, f_k\}$ une base pour F — où donc $k = dim(F)$ — et complétons-la en une base de l'espace V tout entier, c'est-à-dire choissisons $f_{k+1}, \dots, f_n \in V$ telle que $\{f_1, \dots, f_n\}$ soit une base de V — où donc $n = dim(V)$. En particulier, pour tout élément $v \in V$, il existe $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ telles que $v = \sum_{i=1}^n v_i f_i$, et cette décomposition est unique. Nous allons ensuite munir l'espace V d'une norme. Nous rappelons à cette occasion que *toutes les normes sont équivalentes en dimension finie*, si bien que nous pouvons fixer n'importe quelle norme, *quoblibet.* Définissons à cet effet la norme $\|v\| := \max_{i=1,\dots,n} |v_i|$ pour tout élément $v = \sum_{i=1}^n v_i f_i \in V$.

Ceci étant posé, supposons que F ne soit pas fermé. Par définition, il existe donc une suite $(v^j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F admettant une limite $\bar{v}$, *i.e.* $\lim_{j\to\infty} v^j = \bar{v}$ — ce qui se lit encore par définition $\lim_{j\to\infty} \|v^j - \bar{v}\| = 0$ — et telle que $\bar{v} \notin F$. Décomposons $\bar{v}$ dans la base construite précédemment de l'espace V, c'est-à-dire écrivons $\bar{v} = \sum_{j=1}^n \bar{v}_i f_i$. Comme nous avons supposé que $\bar{v}$ n'appartenait pas au sous-espace F, il suit qu'il existe $\ell^* \in \{k+1, \dots, n\}$ telle que $\bar{v}_{\ell^*} \neq 0$. Or, comme $\lim_{j\to\infty} \|v_j - \bar{v}\| = 0$, il suit immédiatement de la définition de la norme $\|\cdot\|$ que pour tout $i = 1, \dots, n$, nous avons $\|v_i^j - \bar{v}_i\| \longrightarrow 0$, où l'on note $v_1^j, \dots, v_n^j$ la décomposition de v^j sur la base en question. Mais, cette fois-ci, et inversément, $v_\ell^j = 0$ pour tout $\ell \in \{k+1, \dots, n\}$ car le $v^j \in F$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par conséquent, nous obtenons une contradiction:

$$0 \neq |\bar{v}_{\ell^*}| = |\underbrace{v_{\ell^*}^j}_{=0} - \bar{v}_{\ell^*}| \longrightarrow 0.$$

Nous avons donc démontré que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé de dimension finie est forcément fermé. Maintenant, nous supposons que $(V, \|\cdot\|)$ soit un espace vectoriel normé quelconque de dimension (potentiellement) infinie. Supposons que $F \subset V$ soit un sous-espace de dimension finie, et montrons que nécessairement, il est fermé. Encore une fois, donnons-nous $f_1, \dots, f_k$ une base de F et supposons qu'il existe une suite $(v^j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F admettant une limite $\bar{v}$ et telle que $\bar{v} \notin F$. Alors, l'espace vectoriel $W = Span(\{f_1, \dots, f_k, \bar{v}\})$ est un espace vectoriel normé de dimension *finie* et contenant *strictement* F, *i.e.* $F \subsetneq W$ — notez que ici l'espace vectoriel W est normé par la norme induite, c'est-à-dire que la norme d'un élément $w \in W$ est tout simplement la norme $\|w\|$ heritée de l'espace ambient V. Mais, d'après ce qui précède, F est nécessairement fermé dans W, et donc il suit que $\bar{v} \in F$. Cela implique que $F = W$, une contradiction.

[1] Il s'agit de l'*Exercice 1.15* du polycopié.

L'ensemble de Vitali n'est pas un borélien[2]

Soit $A \subset I := [0,1]$ l'ensemble obtenu par *quotientage* de I par la relation $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Il faudrait commençer par y voir plus clair dans cette définition. Cela revient à dire, d'un point de vue ensembliste, que A un *ensemble d'ensembles.* C'est-à-dire, que si a est un élément de A, ce qui se note $a \in A$, alors a est un sous-ensemble de I, ce qui se note $a \subset I$. Si un tel sous-ensemble n'est pas vide, alors (par l'axiome du choix) on peut *choisir* un élément $x \in a$, et l'ensemble a est alors précisément donné par l'ensemble

$$a = \{y \in A : x - y \in \mathbb{Q}\} \subset I.$$

Ce que nous allons faire maintenant, c'est identifier ce sous-ensemble a avec un, n'importe lequel, *quodlibet*, de ses éléments. Pour simplifier, notons cet élément $\bar{a} \in a$. Bien évidemment, il faudrait vérifier que ce choix est consistant, c'est-à-dire que, si on prend a et b deux éléments *distincts* de A — donc, deux sous-ensembles $a, b \subset I$ telles que $a \neq b$ — et qu'on choisit comme réprésentants respectifs pour ces sous-ensembles $\bar{a} \in a$ et $\bar{b} \in b$, alors nécessairement $\bar{a} \neq \bar{b}$ — cela revient à dire, du point de vue des sous-ensembles, que, si $a \neq b$, alors $a \cap b = \varnothing$. Mais cela est vrai par le fait qu'une relation d'équivalence est *transitive*, *i.e.* si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x \sim z$ (*Je vous laisse vous en convaincre*).

Supposons que nous avons choisi des réprésentants $\bar{a}$ pour chacun des éléments $a \in A$, et notons $\bar{A} \subset I$ l'ensemble formé de ces réprésentants. Notez que, pour tout $\bar{a} \neq \bar{b} \in A$, on a que $\bar{a} - \bar{q}$ est un irrationnel. Nous allons montrer que $\bar{A}$ n'est *pas* un borélien, en supposons le contraire et en obtenant une contradiction. Si $\bar{A}$ est un borélien, alors l'ensemble

$$V := \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap I} (\bar{A} + r) \subset [0,2]$$

est un borélien par union dénombrable de boréliens — en effet, si $\bar{A}$ est un borélien, il est trivial que le translaté $\bar{A}_r := \bar{A} + r := \{\bar{a} + r : \bar{a} \in \bar{A}\}$ reste un borélien. De plus, pour tous $r \neq s \in \mathbb{Q}$, on a que $\bar{A}_r \cap \bar{A}_s = \varnothing$. En effet, s'il existe $x \in \bar{A}_r \cap \bar{A}_s$, alors il existe $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ telle que $x = \bar{a} + r = \bar{b} + s$. Cela implique $\bar{a} = \bar{b}$, car sinon $\bar{a} - \bar{b} = s - r \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas possible (*cf.* ci-dessus). Mais par conséquent $r = s$, une contradiction. Donc, on obtient que

$$\lambda(V) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap I} \lambda(\bar{A}_r)$$

Maintenant, il faut noter deux choses. La première, c'est que $V \subset [0,2]$, d'où $\lambda(V) \leq 2 < \infty$. La deuxième, c'est que par défintion de la mesure de

[2] Il s'agit de l'*Exercice 4.12* du polycopié

Lebesgue, $\lambda(\bar{A}) = \lambda(\bar{A}_r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap I$. Donc, nécéssairement, $\lambda(\bar{A})$ doit être nul. En effet, si $\lambda(\bar{A}) > 0$, on obtiendrait la contradiction:

$$\infty > \lambda(V) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap I} \lambda(\bar{A}_r) = \underbrace{\lambda(\bar{A})}_{>0} \underbrace{\sum_{r \in \mathbb{Q} \cap I}}_{=\infty} = \infty.$$

Mais donc, on obtient que V est de mesure nulle, *i.e.* $\lambda(V) = 0$. Cependant, par définition de l'ensemble $\bar{A}$, pour tout réel $a \in I$ il existe forcément un élément $\bar{a} \in \bar{A}$ telle que $a - \bar{a} \in \mathbb{Q} \cap I$. Par conséquent, $I \subset V$. On arrive donc à la conclusion que l'ensemble I serait négligeable pour la mesure, une contradiction évidente. Par conséquent, V ne peut <u>pas</u> être mesurable (pour la tribu des boréliens). $\square$

Continuité d'une intégrale à paramètre[3]

Nous considérons la function $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} dt$$

Montrons tout d'abord que cette fonction est <u>bien définie</u> pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ici, notons tout d'abord que l'intégrande est une fonction continue (d'où mesurable) et positive. Donc, si « *bien définie* » s'entend ici comme « *l'intégrale fait sens* », alors cette fonction est effectivement bien définie, partant qu'on lui autorise à prendre la valeur $+\infty$ — c'est-à-dire comme fonction à valeurs dans la droite étendue $\bar{\mathbb{R}}$. Si « *bien définie* » veut de surcroît dire que « *l'intégrale est finie* », alors c'est aussi le cas. En effet, l'intégrande se comporte comme t^{-2} au voisinage de l'infini et, d'après le fait bien connu que $\cos(u) \sim 1 - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ pour $u \to 0$, on trouve que l'intégrande se comporte comme $\frac{1}{2}x^2$ proche de l'origine, une quantité fixée indépendante de la variable d'intégration t. Par conséquent, $F(x) < \infty$ est une quantité positive et finie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrons à présent que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est en fait <u>continue</u>. Notons $f(x,t) := \frac{1-\cos(tx)}{t^2}$, de telle façon à ce que $F(x) = \int_0^\infty f(x,t)dt$. Nous avons (i) pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par prolongement en $t = 0$) et donc mesurable, (ii) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (et a fortiori pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc), la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue. Finalement, il s'agit de trouver une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ <u>indépendante de $x \in \mathbb{R}$</u> telle que g soit intégrable sur $[0,\infty)$ et telle que <u>$|f(x,t)| \leq g(t)$ pour tout</u> $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. En utilisant que $|cos(u)| \leq 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a que $|f(x,t)| \leq 2t^{-2}$ pour

[3] Il s'agit de l'*Exercice 4.33* du polycopié

$(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Cependant, au voisinage de l'origine, la fonction $t \mapsto t^{-2}$ n'est pas intégrable, et n'est donc pas un bon candidat pour g. Pour contourner ce problème, nous pouvons utiliser l'inégalité bien connue[4] $1 - \cos(u) \leq u^2$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. En particulier, si on pose

$$g(t) := \begin{cases} x^2/2 & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{2}{t^2} & t \geq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Cependant, cette fonction dépend de x ! Mais n'oublions pas : la continuité est une notion locale — *i.e.* dire que F est continue sur $\mathbb{R}$, c'est dire qu'elle est continue en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Par conséquent, au lieu de demander que l'inégalité $|f(x,t)| \leq g(t)$ soit vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit, pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}$, de trouver une fonction g_{x_0} (qui dépend de x_0) telle que $|f(x,t)| \leq g_{x_0}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et **pour tout x dans un voisinage de** x_0, disons, par exemple, dans $V_{x_0} := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pour un certain $\delta > 0$. Ceci étant posé, définissons

$$g_{x_0}(t) := \begin{cases} \max\left(\frac{(x_0-\delta)^2}{2}, \frac{(x_0+\delta)^2}{2}\right) & 0 \leq t \leq 1 \\ 2t^{-2} & t \geq 1. \end{cases} \tag{2}$$

Alors, les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres sont bien réunies, et la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien continue $\square$.

[**Remarque**] Travailler avec des équivalents dans la deuxième partie de la preuve (*i.e.* sur la continuité) est *dangereux*, car, ici, la variable x bouge dans un voisinage de x_0. Par exemple, si on considère

$$F(x) := \int_0^{1/x} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

Cette fonction est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, mais elle n'est *pas* continue à l'origine. Si on travaille avec des équivalents sans prendre garde, on pourrait potentiellement écrire de grosses bêtises. En effet, écrivons $f(x,t) := \chi_{[0,x^{-1}]} t^{-\frac{1}{2}}$, de telle façon à ce que $F(x) = \int_0^\infty f(x,t)dt$. Ici, on a l'équivalent $f(x,t) \sim 0$ au voisinage de l'infini, et en fait c'est précisément égal à 0 pour tout $t \geq x^{-1}$. Mais, l'important, ici, c'est que le voisinage sur lequel cette équivalent est vérace, à savoir $[x^{-1}, \infty)$, dépend de x. Si on ne fait pas attention, on dit : *Eh bien,* $|f(x,t)| = 0$ *pour t assez grand et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et donc voilà !* À bon entendeur.

[4] Qui se démontre en utilisant deux fois le théorème de Lagrange

Quelques remarques en vrac

[**Une mesure qui « *finitely additive* » mais non pas σ-additive**] Dans la définition d'une mesure, on demande à ce que soit vérifiée la propriété de $\sigma-$additivité: *Pour toute collection (au plus) dénombrable d'ensembles* $(A_n)_n$ *mesurables et deux à deux disjoints (au sens ensembliste), on a que la mesure de l'union* $\bigcup_n A_n$ *est donnée par la somme des mesures des* A_n. On pourrait se demander s'il suffit en fait de requérir que μ soit « finitely additive », c'est-à-dire que pour n'importe quels deux ensembles mesurables A et B disjoints, on ait $\mu(A \cup B) = \mu(A) \cup \mu(B)$, pour obtenir la $\sigma-$additivité. Ceci est faux, et voici un contre-exemple. Prenons que $X = \mathbb{N}$, et munissons cet ensemble de sa plus grosse tribu, à savoir $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ensuite, prenons $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \bar{R}$ telle $\mu(E) = 0$ si E est de cardinalité finie et $\mu(E) = 1$ si E est de cardinalité *co-finie*, c'est-à-dire si son complémentaire contient un nombre fini d'éléments.

[**$\mathbb{Q}$ n'est ni fermé ni ouvert**] Il a été écrit quelque part que, comme $\mathbb{Q}$ est une réunion dénombrable de singletons, *i.e.* $\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$, et que les singletons sont toujours des fermés[5], alors $\mathbb{Q}$ est fermé. C'est bien évident faux. Ce qui est vrai, c'est qu'une réunion finie de fermés reste fermée, mais un réunion (au moins) dénombrable n'a aucune raison d'être fermé. Prenez par exemple $I_n = [n^{-1}, 1]$, donc la réunion est donnée par $(0, 1]$, qui n'est clairement pas fermé. Il a aussi été écrit quelque part que $\mathbb{Q}$ est ouvert. C'est bien évidemment faux, car je peux toujours trouvé un irrationnel aussi proche que je veux de n'importe quel nombre rationnel. En fait, il faut se rappeler que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$ — l'adhérence de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$.

[**Une mesure $\sigma-$additive est aussi *sous*-additive**] Dans la démonstration que la mesure de Lebesgue de $\mathbb{Q}$ est nulle, on peut écrire (comme certains d'entre vous l'ont fait) que

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Et écrire, donc, que

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \lambda\left(\sum_{p\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{Z}^*} \left\{ \frac{p}{q} \right\} \right)$$

Le problème (qui est seulement d'apparence, et c'est ici mon propos), c'est qu'a priori, la représentation que nous avons donnée de $\mathbb{Q}$ n'est pas bijective, et donc que les singletons qui apparaissent ci-dessus ne sont pas deux à

[5] Attention, ce n'est pas vrai dans tout espace, *cf.* les espaces qui ne sont pas séparés, voir Wikipédia

deux disjoints. Cependant, ce n'est pas grave, car, pour tout mesure μ, et pour toute collection (au plus dénombrable) $(A_n)_n$ de mesurables *a priori* non-disjoints, il est vrai que

$$\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

Essayez de démontrer cette propriété, en utilisant la Proposition 4.2 & 4.3 du polycopié. !

[|det(A)| est le volume de l'image par A du parallépipède unitaire]
Prenons une matrice carrée $A = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Quitte à multiplier à gauche par une matrice de rotation R et considerer ainsi la matrice $A' = RA$, on peut supposer que

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

Le parallélogramme dont par les vecteurs $(1,0)$ et (a_1, a_2) est d'aire $|a_2|$. D'où

$$|det(A)| = |det(R^{-1}A')| = \underbrace{|det(R^{-1})|}_{=1} \cdot |det(A')| = |a_2|.$$

Produit de tribus et tribu du produit $(\star)$[6]

On cherche à démontrer que, si $p + q = d$, alors $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$. Pour simplifier, disons que $p = q = 1$ et donc $d = 2$. Cette question n'est pas tout à fait triviale — à vrai dire, elle peut nous emmener assez loin, si on généralise un peu la question, *cf.* ce qui suit après.

Il faut montrer la double inclusion. Nous allons d'abord démontrer le sens « simple », à savoir que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Pour se faire, on utilise l'astuce suivante. Notons

$$\mathcal{F} := \{A \subset \mathbb{R} : A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}.$$

Il est de mise que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ contenu dans $\mathcal{F}$. En effet, si $U \subset \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, le produit cartésien $U \times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et donc *a fortiori* un borélien, *i.e.* $U \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Il est ensuite facile de voir que $\mathcal{F}$ est en fait une tribu (vérifiez de façon pédestre les différents *item* dans la définition d'une tribu). Par conséquent, $\mathcal{F}$ est une tribu de $\mathbb{R}$ *qui contient l'ensemble des ouverts de* $\mathbb{R}$, et donc, par définition, elle contient la tribu des

[6] Il s'agit de l'*Exercice 4.35* du polycopié.

boréliens sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$. On peut refaire le même argument pour l'ensemble

$$\mathcal{G} := \{B \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}.$$

pour obtenir que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}$. Finalement, prenons un produit cartésien $A \times B$ où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par définition de la tribu produit, il est véracе que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mais, d'après ce qui précedent, $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathbb{R} \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, et donc $(A \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ Or, un calcul ensembliste élémentaire montre que $(A \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B) = A \times B$, et donc $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ par stabilité par intersection d'une tribu. On obtient donc que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *contient l'ensemble des produits cartésiens $A \times B$ où $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est par définition la plus petite tribu qui contient ces produits cartésien, il suit que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, et la première inclusion est démontrée.

L'autre sens de l'inclusion est plus « compliqué ». Il suivra du résultat suivant, que nous allons démontrer : *Tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est l'union dénombrable de (hyper-)rectangles.* En effet, prenons $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Pour tout $x \in U \cap \mathbb{Q}^d$ (*i.e.* toutes les coordonnées de x sont rationnelles) considérons l'ensemble

$$I_x := \bigcup_{\substack{I \text{ rectangle ouvert} \\ x \in I \subset U}} I$$

Comme union d'ouverts, l'ensemble I_x est ouvert, de surcroît contenu dans U et contenant le point $x \in U \cap \mathbb{Q}^d$. Maintenant, si $x = (x_1, \ldots, x_d) \in U \cap (\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d)$ (*i.e.* une des coordonnées de x n'est *pas* rationnelle) alors, parce que U est ouvert, il existe $\delta > 0$ telle que le rectangle ouvert $I := \prod_{i=1}^d (x_i - \delta, x_i + \delta)$ soit contenu dans U, par définition d'être ouvert. Mais, par densité des rationnels, il existe un $x' \in U \cap \mathbb{Q}^d$ telle que $x' \in I$, et par définition $I \subset I_{x'}$. *In fine*, on trouve donc que

$$U = \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}^d} I_x$$

Ceci étant prouvé, tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est contenu dans l'union dénombrable de rectangle ouverts, et donc, il suit immédiatement l'inclusion réciproque, à savoir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour aller (beaucoup) plus loin. Ici, on utilise une propriété extrêmement importante, à savoir que $\mathbb{R}^d$ (muni d'une norme et de la topologie sous-jacente) est un *espace à base dénombrable de voisinage* — ce qui, ici[7],

[7] Dans la glose de la topologie générale, être à *base dénombrable de voisinage*, dans le cas des *espaces métriques*, et équivalent à la *séparabilité* (ou encore à la *propriété de Lindelöf*)

veut en fait dire qu'il existe une partie dénombrable qui est dense dans $\mathbb{R}^d$, ce qui se nomme dans le langage de la topologie la *séparabilité*[8]. Cette partie dense, vous la connaissez bien, c'est tout simplement $\mathbb{Q}^d$. En toute généralité, si on prend X et Y deux *espaces topologiques*, et qu'on considère le produit cartésien $X \times Y$ muni de la *topologie produit*, il est toujours vrai que

$$\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$$

Cependant, l'inclusion réciproque peut-être fausse ! Ces contre-exemples sont assez difficile à construire, et dépassent *très largement* les limites des connaissances que l'on vous apprend dans ce présent cours. Le contre-exemple habituel est de considérer un espace E dont la cardinalité est strictement plus grande que le continu, *i.e.* $|E| > \mathfrak{c}$, muni de sa topologie discrète $\mathcal{P}(E)$. Alors, on peut montrer que l'ensemble diagonal $\Delta := \{(e, e) : e \in E\}$, qui est un ouvert dans le produit $E \times E$ (et donc un borélien), n'est cependant *pas* dans la tribu produit $\mathcal{B}(E) \times \mathcal{B}(E)$. Voici une démonstration, pour ceux et celles que cela intéresse.

Si vous vous posez ensuite la question de savoir s'il existe un contre-exemple dans le cas où E à la puissance du continu, eh bien, cette question est *indécidable* (au sens de la logique). Si on veut s'inscrire dans les limites de ce cours (où la notion d'ouvert ne vous est connue qu'au travers des espaces vectoriels normés), je suppose qu'on pourrait prendre *e.g.* $\ell^\infty(E)$ où $|E| > \mathfrak{c}$, c'est-à-dire l'ensemble des suites $x = (x_i)_{i \in E}$ indexées par l'ensemble E, et muni de la norme $\|x\| = \sup_{i \in E} |x_i|$. Maintenant, j'aimerai (à titre personnel) trouver un contre-exemple pour un espace vectoriel normé non-séparable dont la cardinalité est celle du continu, mais pour l'instant, un tel contre-exemple m'échappe.

[8] À ne pas confrondre à la *séparation* (en anglais: *Hausdorff space*)